# I) Calcul des probabilités

**Exercice 1:** ★ *b.13.41*

On considère $X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}$ des variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbb{P}(X_{i,j} = -1) = \mathbb{P}(X_{i,j} = 1) = \frac{1}{2}$ et on note $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(\det M)$ et $\mathbb{V}(\det M)$ ; que dire de $\det M$ et $-\det M$ ?
2. Donner la probabilité pour que $M$ soit orthogonale, celle qu'elle soit inversible puis celle qu'elle soit diagonalisable.

**Exercice 2:** ★ *b.13.20*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple $(X, Y)$ est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$$

1. Déterminer les lois de $X$ et de $Y$.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de $Y$.
3. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

**Exercice 3:** ★ *b.13.22*

Soient $\lambda, \mu > 0$, $X$ et $Y$ deux variables aléatoires suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer, si $n \in \mathbb{N}$ la loi de $X$ conditionnement à l'évènement $(X + Y = n)$.

**Exercice 4:** ★★ *d.91.51*

Deux joueurs $J_1$ et $J_2$ s'affrontent dans un tournoi jusqu'à la victoire de l'un d'eux. Le tournoi consiste en une succession de manches indépendantes. A chaque manche, le joueur $J_1$ peut l'emporter avec la probabilité $p_1$, le joueur $J_2$ avec la probabilité $p_2$ ou bien il peut y avoir match nul avec la probabilité $q = 1 - p_1 - p_2$. S'il l'un des joueurs emporte la manche, il est déclaré vainqueur du tournoi. S'il y a match nul, on passe à la manche suivante.
Justifier que le tournoi s'arrête et calculer la probabilité de victoire de chaque joueur.

**Exercice 5: ★★** *d.91.39*

Soit $s > 1$.

1. Pour quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ?
2. On munit l'espace de cette probabilité. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'évènement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$ et l'on note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que les évènements $(A_p)_{p\in\mathbb{P}}$ sont indépendants.
3. En étudiant $\mathbb{P}(\{1\})$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

**Exercice 6: ★★** *b.13.21*

Soient $p \in ]0\,,1[$, $q = 1 - p$, $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Déterminer la loi de $D = |X - Y|$.
3. Soit $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi du couple $(D, Z)$.

**Exercice 7: ★★** *b.13.2*

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$.

1. Dénombrer le cardinal de l'ensemble des couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subseteq Y$.
2. Une urne contient $n$ boules. On en tire une poignée aléatoirement, on remet les boules dans l'urne et on en tire une deuxième poignée. Quelle est la probabilité pour qu'aucune boule n'ait été tirée deux fois ?
3. On tire indépendamment deux parties $A$ et $B$ de $E$ et l'on définit les variables aléatoires $I = |A \cap B|$ et $U = |A \cup B|$. Quelle est la loi de $I$ ? Montrer que $I$ et $U$ admettent des variances et les calculer.

**Exercice 8: ★★** *b.13.4*

Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel supérieur à 2. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Pour un entier $p$ divisant $n$, on introduit l'évènement $A_p = \left\{1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{p} \text{ divise } k\right\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_q)$.
2. Soient $p$ et $q$ deux diviseurs de $n$. On suppose que $p$ et $q$ sont premiers entre eux. Montrer que les évènements $A_p$ et $A_q$ sont indépendants. Plus généralement, montrer que si $p_1, \dots, p_r$ sont des diviseurs deux à deux premiers entre eux alors, les évènements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont indépendants.
3. On note $B = \left\{1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{k} \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux}\right\}$. Montrer que

$$p(B) = \prod_{p\in\mathbb{P}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

**Exercice 9: ★★** *b.13.11*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules numérotées $1, \dots, 2n$. On effectue $n$ tirages sans remise.

1. Déterminer la probabilité de tirer, dans cet ordre, $1, 3, 5, \dots, 2n-1$.
2. Déterminer la probabilité de tirer, pas forcément dans cet ordre, $1, 3, 5, \dots, 2n-1$.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$ donnant le rang du dernier numéro impair obtenu. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

**Exercice 10: ★★** *b.13.25*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p$. On pose $D = \text{diag}(X_1, \dots, X_n)$ et $M = PDP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Lois et espérances de $\text{Tr}(M)$, $\det(M)$ et $\text{rg}(M)$ ?
2. Probabilité pour que les sous-espaces propres de $M$ aient tous la même dimension ?
3. Soit $U = (X_1, \dots, X_n)$ et $A = U^\top U$. Donner la loi des coefficients de $A$. Donner la loi de $\text{Tr}(A)$ et $\text{rg}(A)$.

**Exercice 11: ★★** *b.13.26*

Soit $p \in \,]0\,,1[$. On pose $q = 1 - p$. On se donne une suite de variables indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant une loi géométrique de paramètre $p$.

1. Soit $i \in [\![1\,, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leqslant n)$ et $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On considère les variables $U$ et $V$ définies par $U = \max(X_1, X_2)$ et $V = \min(X_1, X_2)$. Déterminer la loi du couple $(U, V)$ et les lois de $U$ et de $V$. $U$

et $V$ sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi de $U+V$ et déterminer son espérance.
4. Soit $N \geqslant 2$. On considère la variable aléatoire $Y$ définie par $Y = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$, c'est-à-dire : $\forall\omega\in\Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega))$.
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y>n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y\leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(Y=n)$.
   (b) Reconnaître la loi de $Y$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.
5. On pose $Z_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ quand $n$ tend vers l'infini.

**Exercice 12: ★★** *b.13.44*

On considère des paquets de cartes, tous identiques, contenant chacun $r$ cartes différentes, numérotées de 1 à $r$. On tire successivement une carte dans chacun des paquets, et on note $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les résultats des tirages. Ainsi les $X_k$ sont des variables aléatoires uniformes sur $\{1,\dots,r\}$, indépendantes.
Et on note pour $i\in\{1,\dots,r\}$, $T_i = \min\{k\in\mathbb{N}, |\{X_1(\omega),\dots,X_k(\omega)\}| = i\}$, et $T = T_r$.

1. Les $(T_i)$ sont-elles indépendantes ?
2. Loi de $Y_i = T_i - T_{i-1}$ en calculant d'abord $\mathbb{P}(Y_i = k \mid T_{i-1} = t)$.
3. En déduire l'espérance de $T$, et montrer que celle-ci est équivalente (pour $r\to+\infty$) à $r\ln r$.

**Exercice 13: ★★** *b.13.76*

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $\sigma_n$ suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On note $X_n$ la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes de $\sigma_n$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$, puis exprimer $\mathbb{P}(X_n = k)$ en fonction de $n$, $k$ et $\mathbb{P}(X_n = 0)$. En déduire la loi de $X_n$.
3. Les $n$ participants à une soirée déposent leur veste au vestiaire. A la fin de la soirée, les vestes sont redistribuées aléatoirement. Soit $X$ le nombre d'invités qui retrouvent leur veste. Préciser la loi, l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 14: ★★★** *b.13.7*

Une urne contient deux boules, une rouge et une blanche. A chaque étape, on pioche une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec deux nouvelles boules de sa couleur.

1. Quelle est la probabilité de piocher $n$ boules rouges en $n$ étapes ?
2. Quelle est la probabilité de ne piocher que des boules rouge, indéfiniment ?
3. On modifie le jeu. Au lieu de rajouter deux boules de la couleur de la boule piochée, on en rajoute $p \geqslant 2$. Quelle est la probabilité de ne piocher que des boules rouges, indéfiniment ?
4. Déterminer la probabilité $\pi_n$ de piocher $n$ boules rouges au bout de $n$ étapes pour $n \to +\infty$.

**Exercice 15: ★★★** *b.13.14*

Dans une urne, on a $n$ boules noires et $n$ boules blanches. On les tire indépendamment uniformément sans remise jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des boules d'une seule couleur. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de boules restantes : $1, \ln n, \sqrt{n}$ ou $n$ ?

**Exercice 16: ★★★** *b.13.29*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On note $J_n$ le matrice $(\mathbb{1}_{j\equiv i+1[n]})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $J_n$.
2. On suppose que $n$ est premier et on admet que $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On se donne $(X_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Soit $M$ la matrice aléatoire
$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \dots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & X_0 & X_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X_2 \\ X_2 & & \ddots & \ddots & X_1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_{n-1} & X_0 \end{pmatrix}$$
Déterminer $\mathbb{P}(M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

**Exercice 17: ★★★** *b.13.30*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n$ (resp. $B_n$) est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont indépendants et suivent une loi uniforme sur $\{0,1\}$ (resp. $\{-1,1\}$). On note $p_n = \mathbb{P}(A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ et $q_n = \mathbb{P}(B_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = p_n$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

**Exercice 18: ★★★** *b.13.36*

Soient $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $P$ et $Q$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble des polynômes unitaires de degré $n$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Calculer $\mathbb{P}(P \wedge Q = 1)$.

**Exercice 19: ★★★** *b.13.75*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $\sigma_n$ suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On note $Y_n$ la variable aléatoire donnant le nombre de cycles de $\sigma_n$. Déterminer $G_{Y_n}$. Puis, calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et en déterminer un équivalent quand $n \longrightarrow +\infty$.

## II) Processus stochastiques

**Exercice 20: ★★** *b.13.15*

On effectue une série infinie de lancers de pile ou face équiprobables. On définit les variables aléatoires $T_{FF}$ et $T_{PF}$ donnant respectivement le rang de la première apparition de $FF$ et de la première apparition de $PF$. Montrer que $T_{FF}$ et $T_{PF}$ sont presque sûrement finis et déterminer leurs espérances. Commenter.

**Exercice 21: ★★** *b.13.79*

1. Trouver les valeurs propres et sous-espaces propres de $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{n,1} = a_{i,i+1} = 1$, tous les autres étant nuls ; en déduire que $J$ est diagonalisable.
2. On note $A_k$ le point d'affixe $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
   A $t = 0$ une puce se trouve en $A_0$. A tout instant, une puce en position $A_k$ fait un bond, de manière équiprobable, vers l'un des deux points voisins sur le cercle. On note $(X_m = k)$ l'évènement : "la puce est sur $A_k$ à l'instant $m$". On pose

$$U_m = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_m = 0) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_m = n-1) \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice $A$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$.

3. Montrer que $A$ est un polynôme en $J$ et en déduire ses éléments propres.
4. Exprimer $U_m$ en fonction de $A$.
5. En déduire le comportement asymptotique de $(U_m)$, en supposant $n$ impair.

**Exercice 22: ★★** *d.91.65*

Trois individus $A$, $B$ et $C$ se lancent une balle. A chaque instant $n \in \mathbb{N}$ :

- ◁ si le joueur $A$ a la balle, il la lance au joueur $B$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou au joueur $C$ avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ;
- ◁ si le joueur $B$ a la balle, il la lance au joueur $C$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou au joueur $A$ avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ;
- ◁ si le joueur $C$ a la balle, il la lance au joueur $A$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou au joueur $B$ avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Les différents lancers sont indépendants et c'est le joueur $A$ qui a la balle à l'instant initial $n = 0$. On note $a_n$, $b_n$, $c_n$ les probabilités respectives que les joueurs $A$, $B$, $C$ aient la balle à l'instant $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.
2. On introduit $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$.
3. En déduire les expressions de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 23: ★★★** *b.13.18*

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de pile soit égal au double du nombre de Face. Quelle est la probabilité de ne jamais s'arrêter ?

**Exercice 24:** ★★★ *b.13.81*

1. Dénombrer l'ensemble $E_n = \left\{ f \in [\![1\,,n]\!]^{[\![1\,,n]\!]}\,, \forall i \in [\![1\,,n]\!]\,, f(i) \leqslant i \right\}$.
2. Soit $f_n$ suivant une loi uniforme sur $E_n$. Soit $X_n = \min\left\{ k \in \mathbb{N}^*, f_n^k(n) = f_n^{k-1}(n) \right\}$. Déterminer la loi de $X_n$, son espérance et sa variance.
3. Calculer $\mathbb{P}(f_n^{X_n}(n) = k)$.

# III) Inégalités de concentration et généralités sur les probabilités ...

**Exercice 25:** ★★ *d.92.100*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes réelles prenant chacune de leurs valeurs dans $[a\,,b]$. On suppose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$$

Montrer que, pour toute fonction $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$$

**Exercice 26:** ★★ *d.92.49*

*Inégalité de Jensen.* Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable convexe et $X$ une variable aléatoire réelle admettant une espérance finie.

1. Montrer
$$f(X) \leqslant f(\mathbb{E}(X)) + f'(\mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))$$
2. En déduire que si $f(X)$ est d'espérance finie,
$$\mathbb{E}(f(X)) \geqslant f(\mathbb{E}(X))$$
3. On ne suppose plus $f$ dérivable. L'inégalité est-elle toujours vérifiée ?

**Exercice 27:** ★★ *d.92.50*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires i.i.d strictement positives. Etablir que

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geqslant 1$$

**Exercice 28:** ★★ *d.92.55*

Soit $X$ une variable aléatoire réelle prenant un nombre fini de valeurs.

1. On suppose que $X$ prend des valeurs toutes positives. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$$

2. On ne suppose plus que $X$ prend des valeurs toutes positives. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}(X < t)\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 29:** ★★ *d.92.57, d.92.81*

On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire $X$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ l'application $\varphi_X : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}(e^{\mathrm{i}tX}) \end{array} \right.$.

1. Vérifier que $\varphi_X$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique.
2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$$

3. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que si $\varphi_X = \varphi_Y$, alors $X$ et $Y$ suivent la même loi.
4. On suppose que $X$ admet une espérance. Vérifier que $\varphi_X$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de $\varphi_X'$.
5. Même question avec la variance.

**Exercice 30:** ★★ *b.13.5*

Soient $A, B$ deux évènements d'un espace probabilisé. Montrer que :

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}$$

**Exercice 31: ★★** *b.13.31*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose qu'il existe une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$. Que dire de $Y$ ?

**Exercice 32: ★★** *b.13.54*

Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $R_n = |X_1, \dots, X_n|$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(R_n) \leqslant a + n\mathbb{P}(X_1 \geqslant a)$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(R_n) = o(n)$.
3. On suppose que les $X_i$ admettent une espérance. Montrer que $\mathbb{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$.

**Exercice 33: ★★** *b.13.63*

Soient $(X_n)$ une suite suite de variables aléatoires discrètes réelles indépendantes centrées et ayant un moment d'ordre 2. On suppose que $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2 \in \mathbb{R}$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Soit $C > 0$.

Posons $T_k = \mathbb{1}_{\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} |S_j| \leqslant c\right) \cap (|S_k| > c)}$.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} T_k = \mathbb{1}_{\exists k \in [\![1\,,n]\!], |S_k| > 0}$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(T_k S_n)^2 \leqslant \sigma^2$.
3. Montrer que $\forall k \in [\![1\,,n]\!]$, $\mathbb{E}(T_k S_k^2) \leqslant \mathbb{E}(T_n S_n^2)$.
4. En déduire que $\mathbb{P}(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| > C) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{C^2}$.

**Exercice 34: ★★** *d.92.48*

Soit $X$ une variable aléatoire réelle centrée admettant une variance. Montrer que :

$$\mathbb{E}(|X|) \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

**Exercice 35: ★★★** *b.13.67*

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que poru tout $r > 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > r\right) \leqslant e^{-\frac{nr^2}{2}}$.
2. On pose $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n}$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ et l'on admet que $\int_{\mathbb{R}} G = 1$. Montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \mathbb{E}(Q(S_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} Q(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 36:** ★★★ *d.91.34*

*Inégalités de Fatou.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On introduit :

$$A_* = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} A_n \text{ et } A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$

1. Vérifier que $A_*$ et $A^*$ sont des évènements. Comment les interpréter ?
2. Montrer que $A_* \subseteq A^*$.
3. Etablir les inégalités :

$$\mathbb{P}(A_*) \leqslant \lim_{p\to+\infty} \inf_{n\geqslant p} \mathbb{P}(A_n) \text{ et } \lim_{p\to+\infty} \sup_{n\geqslant p} \mathbb{P}(A_n) \leqslant \mathbb{P}(A^*)$$

4. Montrer que si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, $\mathbb{P}(A^*) = 0*$.

# IV) Convergences probabilistes

**Exercice 37:** ★★★ *d.92.152 adapté*

Soient $X$ une variable aléatoire réelle sur un espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur ce même espace.

1. Montrer que $\left\{\omega \in \Omega, X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\right\}$ est un évènement.

On dit que la suite $(X_n)$ converge presque sûrement vers $X$ lorsque :

$$\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X) = 1$$

On dit que la suite $(X_n)$ converge en probabilité vers la variable $X$ si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. Montrer que la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, si $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge alors $(X_n)$ converge presque sûrement vers $X$.
4. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, $(X_n(\omega))_n$ est décroissante, et $X_n$ converge presque sûrement vers 0. On suppose de plus $\mathbb{E}(X_0)$ finie. Montrer que

$$\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

**Exercice 38:** ★★★ *d.92.153 adapté*

*Loi forte des grands nombres, version $L^4$.*

On se place dans un espace probabilisé. Soit $(X_n) \in (L^4)^{\mathbb{N}}$, que l'on suppose centrées.
On pose $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, si $\sum \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)$ converge alors $(X_n)$ converge presque sûrement vers 0.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y_n^4) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
3. Montrer que $Y_n$ converge presque sûrement vers 0.
4. Montrer que si on ne suppose plus les $(X_n)$ centrées, $(Y_n)$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.